УДК 517.927.4

О НЕГЛАДКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЯХ В ИССЛЕДОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

КОРНЕВ Сергей Викторович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Воронежский государственный педагогический университет

АННОТАЦИЯ. *В настоящей заметке негладкая интегральная направляющая функция используется для исследования асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений.*
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *функционально-дифференциальное уравнение, периодическое решение, негладкая направляющая функция, асимптотическое поведение.*

KORNEV S.V.,
Cand. Physical and Mathematical Sci., Docent of the Department of Higher Mathematics,
Voronezh State Pedagogical University.

ON NONSMOOTH INTEGRAL GUIDING FUNCTIONS IN THE STUDY OF ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT. *We define a non-smooth integral guiding function for a functional differential equation and apply it to the study of the asymptotic behavior of its solutions.*
KEY WORDS: *functional differential equation, periodic solution, non-smooth guiding function, asymptotic behavior.*

Хорошо известно, что функционально-дифференциальные уравнения являются удобным средством описания нелинейных систем автоматического управления в присутствии эффектов последействия. В частности, задача о периодических траекториях систем с нелинейными звеньями является одной из классических задач математической теории управления (см., например, [1]). При исследовании периодической задачи достаточно эффективным является метод направляющих функций, основу которого заложили еще в шестидесятые годы XX века разработки М.А. Красносельского и А.И. Перова (см. [2], [3]). Геометрическая наглядность и относительная простота в применениях быстро сделали этот метод весьма популярным среди математиков и механиков.

В восьмидесятые годы XX века метод направляющих функций был распространен на случай дифференциальных включений - математический аппарат, описывающий нелинейные управляемые системы с обратной связью, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики (см., например, [4], [5]).

В конце XX – начале XXI веков в связи с открывшимися новыми возможностями приложений к актуальным задачам математики, механики, теории управления, физики и других наук, возникла необходимость в существенном расширении классов рассматриваемых направляющих функций. В частности, для дифференциальных уравнений были введены классы интегральных (см. [6]) и многолистных (см. [7]) направляющих функций, обобщенные в работах [8], [9] на случай дифференциальных включений. Кроме того, все указанные выше классы направляющих функций получили свое распространение на негладкий случай (см., например, [10] – [12]).

Все эти развития метода направляющих функций, в том числе распространение этого метода на случай бесконечномерных пространств, изложены в недавней монографии [13].

Однако прямое применение метода к функционально-дифференциальным включениям затруднительно. Поэтому в настоящей работе , развивая подходы, предложенные в [6] и [14], предлагается использовать негладкую интегральную направляющую функцию для исследования асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00468), РФФИ-Тайвань (прект № 14-01-92004) и РНФ (проект № 14-21-00066).

Информация для связи с автором: kornev_vrn@rambler.ru

Для $h > 0$ обозначим символом C пространство $C([-h,0];R^n)$ непрерывных функций $x:[-h,0]\to R^n$ с нормой $\|x\| = \sup_{t\in[-h,0]}\|x(t)\|$. Для каждой функции $\psi\in C$ символом D_ψ обозначается множество всех непрерывных функций $x:[-h,\infty]\to R^n$ таких, что $x(t)=\psi(t), t\in[-h,0]$ и сужение x на $R_+=[0,+\infty)$ является абсолютно непрерывной функцией. Для функции $x\in D_\psi$ и $t\geq 0$ символом $x_t\in C$ будем обозначать функцию, заданную как $x_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in[-h,0]$.

В настоящей статье рассматривается функционально-дифференциальное уравнение следующего вида:

$$x'(t) = f(t,x_t), \text{ почти для всех } t\in R_+, \quad (1)$$

$$x(t)=\psi(t), \quad t\in[-h,0], \quad (2)$$

и исследуется задача существования решений, удовлетворяющих следующей оценке:

$$\|x(t)\| \leq \frac{k}{g(t)}, t\in R_+,$$

где $k>0$ и g является четной функцией, в предположении, что $f:R_+\times C\to R^n$ удовлетворяет следующим условиям Каратеодори:

(i) для каждого $\varphi\in C$ функция $f(\cdot,\varphi):R_+\to R^n$ измерима;

(ii) почти для каждого $t\in R_+$ отображение $f(t,\cdot):C\to R^n$ непрерывно;

(iii) существует положительная суммируемая на каждом компактном интервале функция $\alpha(\cdot)\in L^1_{loc}(R_+)$ такая, что для каждого $\varphi\in C$ имеем

$\|f(t,x)\|\leq\alpha(t)(1+\|\varphi\|)$ почти для всех $t\in R_+$.

Для данной начальной функции $\psi\in C$ под решением задачи (1), (2) мы будем понимать функцию $x\in D_\psi$, удовлетворяющую уравнению (1) почти для всех $t\in R_+$.

Напомним некоторые понятия негладкого анализа (см., например, [14]).

Пусть $V:R^n\to R$ локально липшицева функция. Для $x\in R^n$ и $v\in R^n$ обобщенная производная $V^0(x;v)$ функции $V(\cdot)$ в точке x по направлению v определяется как:

$$V^0(x;v) = \lim_{\substack{z\to x\\ t\to 0+}} \frac{V(z+tv)-V(z)}{t},$$

где $z\in R^n$. Тогда обобщенный градиент $\partial V(x)$ функции $V(\cdot)$ в точке x определяется следующим образом:

$$\partial V(x) = \{y\in R^n: (y,v)\leq V^0(x;v) \text{ для всех } v\in R^n\}.$$

Известно, что мультиотображение $\partial V:R^n\multimap R$ имеет выпуклые компактные значения и полунепрерывно сверху (по поводу терминологии см., например, [4]).

Напомним, что локально липшицева функция $V:R^n\to R$ называется регулярной, если для каждого $x\in R^n$ и $v\in R^n$ существует производная по направлению $V'(x;v)$, равная обобщенной производной $V^0(x;v)$.

Обозначим символом $\mathfrak{N}$ совокупность всех регулярных функций $V:R^n\to R$, удовлетворяющих условию коэрцитивности:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = -\infty.$$

Заметим, что для данной функции $V\in\mathfrak{N}$ и для каждого $r>0$ существует $k(r)>r$ такое, что если

$$\alpha_r := inf\{V(x), \|x\|\leq r\}, \quad (3)$$

то $V(x)<\alpha_r, \|x\|\geq k(r)$. $\quad (4)$

Пусть $g:R_+\to R_+$ является непрерывно-дифференцируемой функцией такой, что $inf\{g(t), t\in R\}\geq 1$.

Определение. Функция $V\in\mathfrak{N}$ *называется негладкой интегральной направляющей функцией для уравнения (1) вдоль функции* g, *если найдется*

$$r_V > g(0)\|\psi(0)\| \quad (5)$$

такое, что для каждой функции $x\in D_\psi$, *удовлетворяющей условиям:*

(i) существует наибольшее значение $\tau_1^x>0$ *такое, что для всех* $t\in[0,\tau_1^x)$

$g(t)\|x(t)\|\leq r_V$;

(ii) существует наибольшее значение $\tau_*^x>\tau_1^x$ *такое, что*

$g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V := k(r_V)$;

(iii) $\|x'(t)\|\leq\|F(t,x_t)\|$ *для всех* $t\in R_+$;

мы имеем

$$\int_{\tau_V^x}^{\tau_*^x}\langle v(s), g'(s)x(s)+g(s)f(s)\rangle ds \geq 0 \quad (6)$$

для каждого суммируемого сечения $v(s)\in\partial V(g(s)x(s))$, *где*

$\tau_\#^x := sup\{\tau\in[\tau_1^x,\tau_*^x), \|g(\tau)x(\tau)\| = r_V\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $V\in\mathfrak{N}$ *является негладкой интегральной направляющей функцией для уравнения (1) вдоль функции* g. *Тогда каждое решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет оценке*

$$\|x(t)\|\leq k_V\cdot\frac{1}{g(t)}, \ t\in R_+. \quad (7)$$

Для доказательства нам понадобится следующее утверждение (см., например, [15]).

Лемма. *Пусть* $V\in\mathfrak{N}$ *и* $x:[a,b]\to R^n$ *является абсолютно непрерывной функцией. Тогда функция* $V(x(t))$ *также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее соотношение*

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s), x'(s))ds, \ t\in[a,b].$$

Доказательство теоремы. При сделанных предположениях на правую часть функционально-дифференциального уравнения (1), задача (1)-(2) имеет продолжимое на R_+ решение.

Пусть $x(\cdot)$ – некоторое решение задачи (1)-(2) на R_+. Из (5) следует, что найдется наибольшее $\tau_1^x>0$ такое, что

$$g(t)\|x(t)\|\leq r_V < k_V, t\in[0,\tau_1^x). \quad (8)$$

Если $\tau_1^x=+\infty$, то

$$\|x(t)\| < k_V\cdot\frac{1}{g(t)}, \ t\in R_+ \quad (9)$$

и утверждение доказано.

Если $\tau_1^x<+\infty$, то оценка (8) справедлива только на ограниченном интервале. Покажем, что

$$g(t)\|x(t)\|\leq k_V, t\in R_+. \quad (10)$$

В предположении противного, найдется $\tau_2^x>\tau_1^x$ такое, что

$$g(\tau_2^x)\|x(\tau_2^x)\| > k_V. \quad (11)$$

Из (8) и (11) следует, что найдется $\tau_1^x<\tau_*^x<\tau_2^x$, для которого

$$g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V. \quad (12)$$

Обозначив

$\tau_\#^x = \sup\{\tau\in[\tau_1^x,\tau_*^x), \quad g(\tau)\|x(\tau)\| = r_V\}$, получим

$$g(\tau_k^x)\|x(\tau_k^x)\| = r_V.$$

Тогда из (3) вытекает следующая оценка

$$V(g(\tau_k^x)\|x(\tau_k^x)\|) \geq \alpha_{r_V}. \qquad (13)$$

Применяя приведенные выше лемму и определение, имеем

$$V(g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\|) - V(g(\tau_k^x)\|x(\tau_k^x)\|)$$

$$= \int_{\tau_k^x}^{\tau_*^x} V^0(g(s)x(s), g'(s)x(s) + g(s)x'(s))ds \geq$$

$$\geq \int_{\tau_k^x}^{\tau_*^x} \langle v(s), g'(s)x(s) + g(s)x'(s) \rangle \, ds \geq 0,$$

$v(s) \in \partial V(g(s)x(s))$.

Учитывая соотношения (4), (12) и (13), получаем

$$\alpha_{r_V} > V(g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\|) \geq V(g(\tau_k^x)\|x(\tau_k^x)\|) \geq \alpha_{r_V}.$$

Полученное противоречие и доказывает оценку (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Krasnoselskii, A.M. Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations / A.M. Krasnoselskii, M.A. Krasnoselskii, J. Mawhin, A. Pokrovskii // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. – 1994. – V. 22. – № 11. – P. 1357–1371.
2. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 332 с.
3. Красносельский, М.А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский, А.И. Перов // ДАН СССР. – 1958. – Т. 123. – № 2. – С. 235–238.
4. Борисович, Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений [Текст] / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. – М. : Книжный дом «Либроком», 2011. – 224 с.
5. Gorniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Gorniewicz. – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999. – 399 p.
6. Fonda, A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations / A. Fonda // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – V. 99. – № 1. – P. 79–85.
7. Рачинский, Д.И. Вынужденные колебания в системах управления в условиях, близких к резонансу [Текст] / Д.И. Рачинский // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 11. – С. 87–98.
8. Корнев, С.В. Об интегральных направляющих функциях для функционально-диффернциальных включений [Текст] / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж, 2000. – С. 87–107.
9. Корнев, С.В. О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений [Текст] / С.В. Корнев // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3. – С. 72–83.
10. De Blasi, F.S. Topological degree and periodic solutions of differential inclusions / F.S. De Blasi, L. Gorniewicz, G. Pianigiani // Nonlinear Anal. – 1999. – V. 37. – P. 217–245.
11. Корнев, С.В. О негладких многолистных направляющих функциях [Текст] / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 11. – С. 1497–1502.
12. Kornev, S. On some developments of the method of integral guiding functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. – 2005. – V. 12. – № 3–4. – PP. 303–310.
13. Obukhovskii, V. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis / V. Obukhovskii, P. Zecca, N.V. Loi, S. Kornev. – Lecture Notes in Math. – V. 2076. – Berlin : Springer, 2013. – 177 p.
14. Avramescu C. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions // Eiectronic journal of qualitive theory of differential equations. – 2003. – № 13. – P. 1–9.
15. Кларк, Ф. Оптимизация и негладкий анализ [Текст] / Ф. Кларк. – М. : Наука, 1988. – 280 с.
16. Корнев С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций [Текст] / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. – № 6. – С. 700–705.